

Processus markoviens déterministes par morceaux et quantification déterministe avec un schéma de volumes finis : un cas d'étude.

Piecewise Deterministic Markov Processes and deterministic quantification with a finite volume algorithm: a study case.

LAIR William¹ et **ZIANI**

Rachid

SNCF,
Direction de l'Innovation et
de la Recherche,
45 rue de Londres, Paris,
France
+33(0)153422130,
william.lair@sncf.fr
rachid.ziani@sncf.fr

MERCIER Sophie

¹Université de Pau et des Pays de
l'Adour,
Laboratoire de Mathématiques et de
leurs Applications-Pau (UMR CNRS
5142),
Bâtiment IPRA,
Avenue de l'Université - BP 1155, Pau,
France
+33(0)559407537,
sophie.mercier@univ-pau.fr

ROUSSIGNOL Michel

Université Paris-Est Marne-la-
Vallée,
Laboratoire d'Analyse et de
Mathématiques Appliquées (UMR
CNRS 8050),
5 bd Descartes, Champs-sur-
Marne, France, +33(0)160957528,
michel.roussignol@univ-paris-est.fr

Résumé

Cette communication présente une utilisation des processus markoviens déterministes par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Processes ou PDMP) modélisant l'évolution aléatoire d'un réservoir alimenté par deux pompes comme dans (Zhang et al. 2008), en vue du calcul de quantités de fiabilité. A la différence de (Zhang et al. 2008), nous n'utilisons pas de simulations de Monte-Carlo pour quantifier le modèle, mais un algorithme déterministe basé sur un schéma de volumes finis. Le but de cette communication est de comparer les résultats obtenus avec d'autres publiés précédemment, voir (Zhang et al. 2008), (Castaneda 2009) et (Tomhuysen et al. 1997). Nous modélisons un réservoir contenant un liquide dont le niveau doit être maintenu à l'aide de deux pompes et d'une vanne de vidange. Chacun de ces composants possède un détecteur de niveau qui commande l'ouverture et la fermeture du composant auquel il est rattaché. Une source de puissance thermique constante chauffe le liquide dont la température évolue en fonction des débits d'entrée et de sortie du liquide. Les trois composants peuvent tomber en panne et rester bloqués en position ouverte ou fermée. Le taux de panne des composants dépend de la température. Nous calculons ainsi la probabilité des événements redoutés: le débordement du réservoir, l'assèchement du réservoir et une température trop élevée. Nous cherchons à montrer l'efficacité du schéma de volumes finis pour calculer les quantités d'intérêt.

Summary

This paper demonstrates the usage of Piecewise Deterministic Markov processes (or piecewise Deterministic Markov Processes PDMP) modeling the random evolution of a reservoir fed by two pumps as in (Zhang and al. 2008), for computing quantities in reliability. Unlike (Zhang et al. 2008), we do not use Monte Carlo to quantify the model, we use a deterministic algorithm based on a finite volume scheme. The purpose of this paper is to compare the results with other previously published, see (Zhang and al. 2008), (Castaneda 2009) and (Tomhuysen and al. 1997). We model a tank containing a liquid whose level must be maintained by using two pumps and a drain valve. Each of these components has a level sensor that controls the opening and closing of the component to which it is attached. A constant source of thermal power heats the liquid whose temperature evolves according to the rates of entry and exit of liquid. The three components can fail and get stuck open or closed. Failure rates of components depend on the temperature. We calculate the probability of feared events: the overflowing of the tank, draining the tank and a temperature too high. We try to show the effectiveness of the finite volume scheme to calculate the quantities of interest.

Introduction et contexte

La SNCF mène des projets de recherche qui visent à accroître l'efficacité de la maintenance de ses installations de signalisation et de son matériel roulant. Pour ce faire, des modèles probabilistes de fiabilité système sont développés au sein de la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF en collaboration avec l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée. Un modèle de fiabilité dynamique, les processus markoviens déterministes par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Processes ou PDMP), a déjà été testé sur différents systèmes ferroviaires (circuit de voie (Lair et al. 2009) et système de climatisation de train TER (Lair et al. 2010)) et a ainsi montré sa pertinence. La quantification du modèle a été réalisée par la résolution d'une équation aux dérivées partielles (Chapman-Kolmogorov) à l'aide d'un algorithme de volumes finis. La rapidité des calculs et la précision des résultats de fiabilité nous ont permis d'optimiser la maintenance de ces systèmes multi-composants (7 composants en série pour le circuit de voie et 17 composants série/parallèle pour le système de climatisation). Nous n'avons jusqu'à maintenant pas confronté nos résultats à ceux obtenus par d'autres auteurs. Ainsi, nous avons choisi d'appliquer cette méthodologie à un cas d'étude traité par de nombreux auteurs avec diverses méthodes : il s'agit d'un réservoir alimenté par deux pompes, traité dans (Zhang et al. 2008), (Castaneda 2009) et (Tomhuysen et al. 1997). Dans (Zhang et al. 2008), le réservoir est modélisé par un PDMP et le traitement numérique est réalisé avec des simulations de Monte-Carlo. Les résultats sont par ailleurs comparés à ceux trouvés dans (Tomhuysen et al. 1997). Dans (Castaneda 2009), l'auteur a modélisé le réservoir à l'aide d'un automate stochastique hybride et le traitement est là encore réalisé avec des simulations de Monte-Carlo. Dans (Tomhuysen et al. 1997), les auteurs utilisent la méthode dite Continuous Cell to Cell Mapping (CCCM) pour calculer les quantités d'intérêt. Cet article est organisé de la façon suivante : dans un premier temps, les PDMP sont présentés ainsi que le schéma de volumes finis permettant de quantifier le modèle. Dans la partie suivante, nous présentons le système étudié et son fonctionnement ainsi que sa modélisation par un PDMP. Dans une troisième partie, les résultats obtenus sont comparés à ceux trouvés par des simulations de Monte-Carlo dans (Zhang et al. 2008). Enfin nous concluons dans la dernière partie.

Les processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP)

1. Présentation des PDMP

La méthode de modélisation utilisée consiste à décrire l'évolution du système par un PDMP. Ce type de processus a été développé par Davis, voir (Davis 1984) et (Davis 1993), et appartient à ce que Devooght nomme la fiabilité dynamique selon le vocabulaire qu'il a introduit dans les années 90 au départ pour des problèmes issus du domaine de la sûreté nucléaire, voir (Devooght 1997). Un PDMP est un processus hybride $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$. La première composante I_t est discrète à valeurs dans un espace fini ou dénombrable E et décrit généralement l'état du système à l'instant t (par exemple marche ou panne). La deuxième composante X_t est continue à valeurs dans R^d , elle décrit l'évolution des variables environnementales qui vont influencer et être influencées par le système (par exemple la température). Les deux composantes sont en mutuelle interaction : le taux de transition d'un état i vers un état j dépend de la composante continue x , on le note $a(i, j, x)$. Entre deux sauts de la partie discrète $(I_t)_{t \geq 0}$, la trajectoire de $(X_t)_{t \geq 0}$ est déterministe, solution de l'équation différentielle [1] qui dépend de l'état discret i . Lors d'un saut de I_t , de i vers j , la variable continue X_t peut aussi sauter et est distribuée selon une loi qui dépend de la composante discrète avant et après le saut et de la composante continue juste avant le saut. Cette loi se note $\mu_{(i, j, x)}(dy)$.

$$\frac{dx}{dt} = v(i, x) \quad [1]$$

L'espace d'état de la variable continue peut être borné et admettre une frontière. Dans ce cas, quand X_t atteint cette frontière notée Γ , le processus peut sauter selon la distribution $q_{(i, j, x)}(dy)$, avec $x \in \Gamma$, qui dépend de l'état avant le saut, i et de l'état après le saut, j .

Dans cet article les quantités recherchées, ainsi que de nombreuses quantités fiabilistes, peuvent s'écrire en fonction des distributions marginales du PDMP. Ces distributions sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles appelées équations de Chapman-Kolmogorov. Ces équations décrivent un bilan de flux de probabilités. On note $\pi_t(i, dx)$ la loi marginale du PDMP à l'instant t . l'équation [2] représente les équations de Chapman-Kolmogorov dans le cas où il n'y a pas de sauts induits par des atteintes de frontière. Dans ces cas, le système d'équations devient beaucoup plus complexe.

$$\begin{aligned} \forall t \in R^+, \forall \varphi \in C_c^1(E \times R^d), \\ \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{R^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left(\int_{R^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x) \right) \pi_s(i, dx) ds + \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{R^d} v(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) \pi_s(i, dx) ds \\ - \sum_{i \in E} \int_{R^d} \varphi(i, x) \pi_t(i, dx) + \sum_{i \in E} \int_{R^d} \varphi(i, x) \pi_0(i, dx) = 0 \end{aligned} \quad [2]$$

Les lois marginales du PDMP $\pi_t(i, dx)$ pour tout instant t sont l'unique solution des équations de Chapman-Kolmogorov, voir (Cocozza-Thivent et al. 2006). L'équation est dans la plupart des cas trop complexe pour être résolue de façon directe. Des simulations de Monte-Carlo sont souvent utilisées pour quantifier les PDMP comme dans (Zhang et al. 2008) et (Castaneda 2009). Dans les cas d'application de la SNCF où il s'agit d'optimiser des stratégies de maintenance, voir (Lair et al. 2009) et (Lair et al. 2010), les simulations de Monte-Carlo ne semblent pas très bien adaptées, du fait du caractère aléatoire des résultats, en particulier lorsque les scénarii de maintenance sont proches. En effet, nous avons observé des problèmes de convergence d'un algorithme de recuit simulé lors de la recherche d'un optimum avec des calculs numériques par Monte-Carlo. Ceci conduit à la recherche de méthodes de quantifications alternatives. Nous développons donc une autre méthode basée sur un algorithme de volumes finis dont le but est de calculer une estimation numérique de $\pi_t(i, dx)$. Ce type d'algorithme est adapté à la résolution d'EDP.

2. L'algorithme de volumes finis

Le schéma que nous utilisons est un schéma de volumes finis explicite, plus simple à programmer qu'un schéma implicite, mais qui induit des contraintes sur les pas d'espace et de temps pour que le schéma soit stable. Le principe de ce type d'algorithme est basé sur la discrétisation du temps et de l'espace des variables physiques, voir (Eymard et al. 2006) et (Eymard et al. 2008). Cet espace est discrétisé sous forme d'une partition qui vérifie des conditions de régularité. L'évolution des distributions du processus est suivie et la probabilité que le processus se trouve dans une cellule du maillage est calculée à tous les pas de temps. Cela nous amène à résoudre un système linéaire. Les distributions évoluent de deux façons différentes, elles peuvent évoluer selon les sauts aléatoires de la variable discrète du PDMP ou selon l'évolution déterministe de la variable continue au cours du temps.

L'algorithme calcule une approximation de $\pi_t(i, dx)$ qui a une densité $v_t(i, x)$ en fonction de la mesure de Lebesgue constante et égale à $u_n(i, M)$ quand $n \cdot \delta t \leq t < (n+1) \cdot \delta t$ et x appartient à la maille M avec δt le pas de discrétisation du temps. Les taux de transition entre les états de la variable discrète sont discrétisés ainsi que les équations différentielles qui régissent l'évolution de la variable continue. A chaque pas de temps, les variables environnementales évoluent ce qui provoque le déplacement de masse de probabilité d'une cellule à l'autre. De même à chaque pas de temps, il existe une probabilité que la variable continue saute, par exemple dû à un saut de la variable discrète ou à l'atteinte d'un élément de la frontière par la variable continue, ce qui engendre également le déplacement de masse de probabilité dans le maillage. L'algorithme permet ainsi de suivre toutes les évolutions possibles du système que l'on modélise.

Une limitation d'un tel algorithme se situe au niveau de la complexité du système que l'on souhaite modéliser et du nombre de facteurs environnementaux qui influent l'évolution de ce système. En effet, si le système dépend de n variables environnementales, l'espace dans lequel évolue la variable continue du PDMP est un borélien de R^n . Ainsi, la taille de l'espace mémoire nécessaire à l'algorithme augmente de façon exponentielle avec le nombre de variables environnementales. Cela limite l'utilisation de cette méthode pour des systèmes qui dépendent de nombreux facteurs environnementaux. Dans le cas étudié ici, seuls deux variables évoluent conjointement avec le système : la température et le niveau du liquide dans le réservoir. Cela ne pose pas de problème pour utiliser l'algorithme de volumes finis.

Le cas d'étude

1. Présentation du cas d'étude

En premier lieu, nous précisons que ce cas d'étude est fictif et ne correspond pas à un cas réel. Le cas d'étude est un benchmark classique de la littérature fiabiliste. La description ci-dessous est reprise de (Zhang et al. 2008). Le système est composé d'un réservoir contenant un liquide dont le niveau est maintenu par deux pompes P1 et P2 et d'une vanne de vidange V. Chacun de ces composants possède un détecteur de niveau qui commande l'ouverture et la fermeture du composant auquel il est rattaché. Une source de puissance thermique constante chauffe le liquide dont la température évolue en fonction des débits d'entrée et de sortie du liquide.

En mode normal, le système fonctionne de telle façon à ce que le niveau reste entre 6 et 8 mètres. Initialement le niveau du liquide se trouve à 7 mètres, la pompe P1 est active, la pompe P2 est inactive et la vanne V est ouverte. Dans cet état, le niveau n'évolue pas et reste à 7 mètres, en revanche la température augmente. Si la température atteint 100°C, le système s'arrête de fonctionner, ce qui est considéré comme un événement redouté. Les taux de panne des pompes et de la vanne augmentent avec la température, voir équation [3], ce qui peut entraîner le blocage de l'un de ces composants en position active ou inactive, voir figure 3. Si le blocage d'un composant survient avant que la température n'atteigne le seuil critique, cela peut entraîner une évolution de la hauteur du liquide et changer l'évolution de la température. Lorsque le niveau du liquide atteint 6 ou 8 mètres, les composants sont activés ou inactivés selon le schéma de la figure 2 s'ils ne sont pas bloqués. Il est possible que le blocage de un ou plusieurs composants entraîne que le niveau du liquide descende en dessous de 6 mètres ou monte au dessus de 8 mètres. On considère que le réservoir est asséché si le niveau descend en dessous de 4 mètres et que le réservoir déborde si le niveau est supérieur à 10 mètres. Ces deux événements sont considérés comme des événements redoutés que l'on cherche à éviter. Dès que l'un des trois événements redoutés se produit, le système s'arrête de fonctionner et il reste dans l'état dans lequel il se trouve à cet instant. Cela signifie que la température et le niveau du liquide n'évolue plus.

Les taux de panne des composants dépendent de la température, et se mettent sous la forme suivante

$$\lambda_c(T) = a(T)\hat{\lambda}_c, \text{ pour } c = P1, P2, V, \quad [3]$$

$$a(T) = \frac{b_1 e^{b_c(T-20)} + b_2 e^{-b_d(T-20)}}{b_1 + b_2},$$

où $a(T)$ est une fonction qui dépend de la température et dont les paramètres sont :

- $\hat{\lambda}_{P1} = 2.2831 \cdot 10^{-3} h^{-1}$, $\hat{\lambda}_{P2} = 2.8571 \cdot 10^{-3} h^{-1}$, $\hat{\lambda}_V = 1.5625 \cdot 10^{-3} h^{-1}$,
- $b_1 = 3.029$, $b_2 = 0.7578$, $b_c = 0.05756$ et $b_d = 0.2301$.

Les trois composants sont indépendants et non réparables. En marche normal, un composant passe de l'état marche à l'état arrêté. Lorsqu'il tombe en panne, il peut soit rester bloqué dans l'état où il se trouve soit changer d'état et y rester. La figure 3 décrit ces modes de pannes.

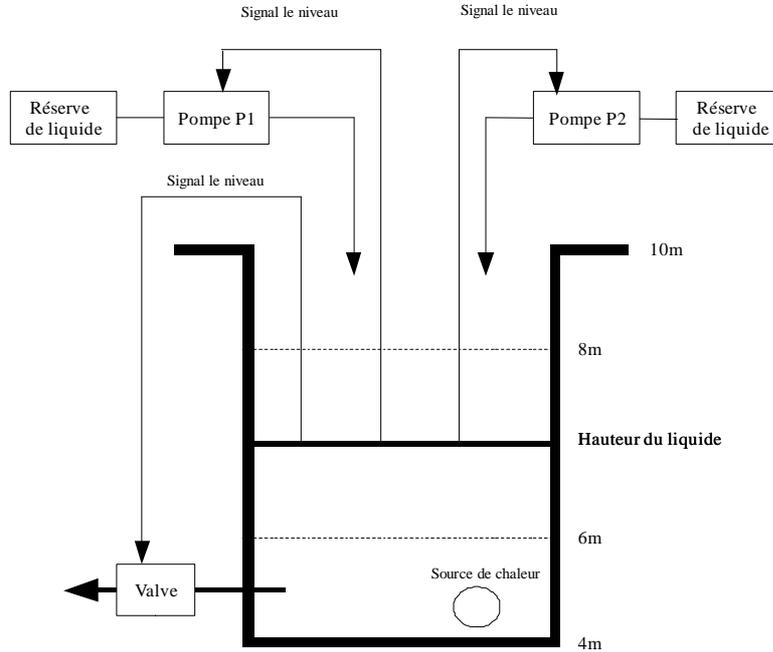


Figure 1 - Schéma du réservoir.

L'évolution de la température et de la hauteur du liquide est gérée par un système d'équations différentielles dépendant de l'état des trois composants, voire formules {4}.

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \gamma_1(v) \\ \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma_2(v) - \gamma_3(v)T}{h} \end{cases} \text{ où } v = (v_{P1}, v_{P2}, v_V) \text{ et } v_c = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ est OFF ou bloqué en OFF} \\ 1 & \text{si } c \text{ est ON ou bloqué en ON} \end{cases} \quad [4]$$

On note

$$\gamma_1(v) = (v_{P1} + v_{P2} - v_V)G \quad [5]$$

$$\gamma_2(v) = (v_{P1} + v_{P2})GT_{in} + 23.88915 \quad [6]$$

$$\gamma_3(v) = (v_{P1} + v_{P2})G \quad [7]$$

G représente le débit d'entrée du liquide des pompes et le débit de sortie du liquide de la valve. Il est égal à $1.5m^3h^{-1}$.

T_{in} est la température du liquide lorsqu'il entre dans le cylindre. Elle est égale à $15^\circ c$.

Pour plus de détails sur ces équations, le lecteur pourra se référer à l'article (Zhang et al. 2008).

Nous cherchons à calculer la probabilité d'occurrence de trois événements redoutés avant l'instant t :

- l'assèchement du réservoir $p_1(t) = P(h(t) \leq 4)$,
- le débordement du réservoir $p_2(t) = P(h(t) \geq 10)$,
- une température trop haute $p_3(t) = P(T(t) \geq 100)$.

Dans le but d'obtenir ces quantités, nous modélisons le système par un PDMP et nous quantifions le modèle à l'aide d'un schéma de volumes finis. Dans le prochain paragraphe, la modélisation de ce système par un PDMP est détaillée.

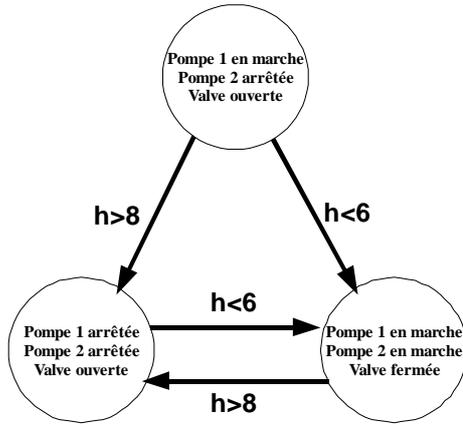


Figure 2 - Etats du système en mode nominal.

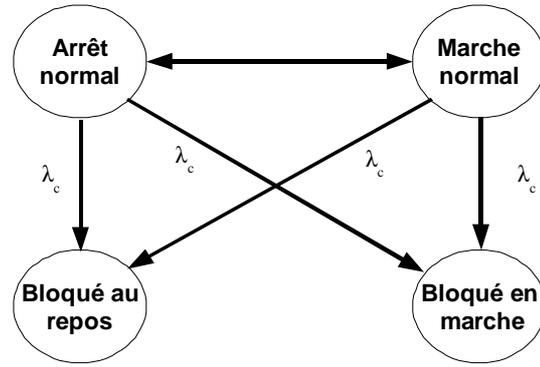


Figure 3 - Etats et transitions des composants.

2. Modélisation du système par un PDMP et traitement numérique

La figure 3 montre que chacun des composants peut se trouver dans quatre états différents: I si le composant est actif, I_b si le composant est bloqué en mode actif, O si le composant est inactif et O_b si le composant est bloqué en mode inactif. Ainsi le système formé de ces trois composants peut se trouver dans 4^3 états lorsqu'il est en fonctionnement. A la suite d'un événement redouté, le système s'arrête de fonctionner, il faut donc créer trois états absorbants correspondant chacun à l'occurrence d'un événement redouté : As pour assèchement, De pour débordement et Te pour une température trop élevée. La variable discrète du PDMP décrit l'état des trois composants du système lorsqu'il fonctionne ou décrit l'événement qui a provoqué l'arrêt du système lorsqu'il ne fonctionne pas, ainsi l'espace dans lequel cette variable évolue, noté E , comporte 4^3+3 états.

$$E = \left\{ (a, b, c) \text{ avec } (a, b, c) \notin \{1, I_b, 0, O_b\}^4, As, De, Te \right\} \quad [8]$$

Deux variables environnementales évoluent conjointement avec le système : la température et le niveau du liquide dans le réservoir, la variable environnementale du PDMP est donc de dimension 2. Posons $X_t = (h, T)$. Le niveau du liquide évolue entre 4 et 10 mètres. Lorsque l'un des trois événements redoutés se produit, la variable I saute vers un état correspondant à l'événement redouté puis y reste. Dans ces états, la température et le niveau du liquide n'évoluent plus, nous n'avons plus besoin de les garder en mémoire. La température ne dépassera donc jamais $100^\circ c$. L'espace dans lequel évolue X est donc $[4; 10] \times [0; 100]$ quand le système fonctionne. Si aucun événement redouté ne s'est produit, la variable continue du PDMP suit une évolution déterministe décrite par le système d'équations [4] entre les sauts de la variable discrète.

Les états As , De et Te sont absorbants donc il n'y a pas de taux de transition qui provoque un saut hors de ces états. Lorsque le système est en fonctionnement, les pompes et la valve peuvent se bloquer selon un taux de transition qui ne dépend que de la température défini dans [3]. Un saut de l'état i vers l'état j dû au blocage d'un composant, est induit par un taux de transition défini dans [9].

$$a(i, j, (h, T)) = \lambda_c(T). \quad [9]$$

Lorsqu'un tel saut se produit, la température et le niveau du liquide restent les mêmes états ainsi, la distribution de la variable continue après ce saut est définie dans [10].

$$\mu_{(i, j, (h, T))} (dh^*, dT^*) = \delta_{h, T} (dh^*, dT^*), \quad [10]$$

Pour modéliser le changement d'état du système dû à l'activation ou la désactivation d'un composant ou encore dû à l'occurrence d'un événement redouté, des frontières doivent être créées. Cet ensemble est défini dans [11].

$$\Gamma = \{(4, x); (6, x); (8, x); (10, x); (y, 100)\} \text{ avec } x \in [0; 100] \text{ et } y \in [4; 10] \quad [11]$$

A l'atteinte d'un élément de cet ensemble, le variable discrète du PDMP, I , saute. Si la température atteint 100°C ou si le niveau atteint 4 ou 10 mètres, I saute vers un état absorbant respectivement Te , As et De . Si un autre élément de la frontière est atteint alors le saut de I se fait selon la figure 2 si le composant qui doit changer d'état n'est pas bloqué. De la même façon qu'un saut induit par le blocage d'un composant, un saut provoqué par l'atteinte d'un élément de la frontière ne change pas la valeur du niveau et de la température.

Le calcul des probabilités d'événements redoutés se fait à l'aide du schéma de volumes finis. Les résultats obtenus sont donc issus d'une estimation numérique. Soit δt le pas de discrétisation du temps, δh le pas de discrétisation de l'espace dans lequel évolue le niveau du liquide et δT le pas de discrétisation de l'espace dans lequel évolue la température. La figure 4 illustre la discrétisation de l'espace des variables environnementales lorsque la variable discrète est dans l'état de fonctionnement i . Avec les notations associées à l'algorithme, nous avons respectivement $u_n(Te)$, $u_n(As)$ et $u_n(De)$, l'estimation de la probabilité d'occurrence d'une température trop élevée, de l'assèchement du réservoir et du débordement du réservoir avant l'instant t quand $n.\delta t \leq t < (n+1).\delta t$.

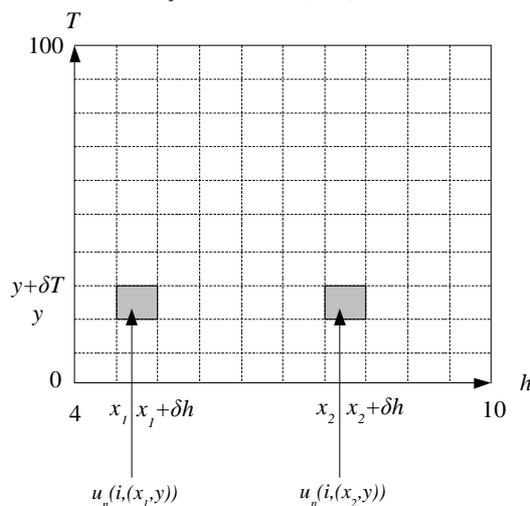


Figure 4 - Discretisation de l'espace des variables environnementales lorsque $I=i$, i étant un état de fonctionnement.

3. Résultats numériques

Les résultats numériques obtenus avec l'algorithme sont comparés à ceux trouvés avec des simulations de Monte-Carlo (10^7 histoires) dans (Zhang et al. 2008). Les résultats de (Tombyuses et al. 1997) sont identiques à ceux trouvés dans (Zhang et al. 2008) ainsi nous ne les utiliserons pas. Les résultats de (Castaneda 2009) sont différents de ceux trouvés dans (Zhang et al. 2008). Selon l'auteur, cette différence pourrait venir du fait que dans sa modélisation l'occurrence d'un événement redouté n'entraîne pas le saut du processus vers un état absorbant. Il considère que le système continue d'évoluer et peut subir un autre événement redouté. Ainsi nous ne comparerons pas nos résultats à ceux trouvés dans (Castaneda 2009).

Nous utilisons différents pas de discrétisation. Le pas de discrétisation du temps est fixé à sa plus grande valeur afin que l'algorithme de volumes finis soit stable. On déduit sa valeur à l'aide d'une fonction qui dépend des pas de discrétisation de l'espace des variables physiques. Les probabilités d'événements redoutés calculées avec différents pas de discrétisations sont comparées avec celles de (Zhang et al. 2008) dans la figure 5. Les deux méthodes donnent des résultats quasiment identiques ce qui permet de valider notre méthode.

Aux vues des graphiques de la figure 5, on peut remarquer que les résultats sont plus précis lorsque les pas de discrétisation sont plus fins ce qui est cohérent. En revanche, la diminution des pas de discrétisation entraîne une augmentation des temps de calculs.

Les temps de calcul associés au schéma de volumes finis sont difficiles à comparer avec ceux trouvés dans (Zhang et al. 2008) car les ordinateurs utilisés pour réaliser les calculs ne sont pas les mêmes. Le processeur utilisé dans (Zhang et al. 2008) est un AMD Opteron Processor 275 cadencé à 2.2GHz, dans notre article le processeur est un INTEL Celeron CPU 440 cadencé à 2GHz. Le tableau 1 reprend les résultats issus de l'article (Zhang et al. 2008). L'erreur relative correspond à la formule [12].

Il est considéré dans (Zhang et al. 2008) que la valeur de référence de la probabilité d'assèchement du réservoir avant 1000 heures de fonctionnement, notée $p_1(1000)$, est celle trouvée avec 10^7 simulations. Posons $\tilde{p}_1(1000)$ la valeur estimée. La formule [12] permet d'obtenir l'erreur relative d'estimation de $p_1(1000)$.

$$Er = \left| \frac{p_1(1000) - \tilde{p}_1(1000)}{p_1(1000)} \right| \cdot 100 \quad [12]$$

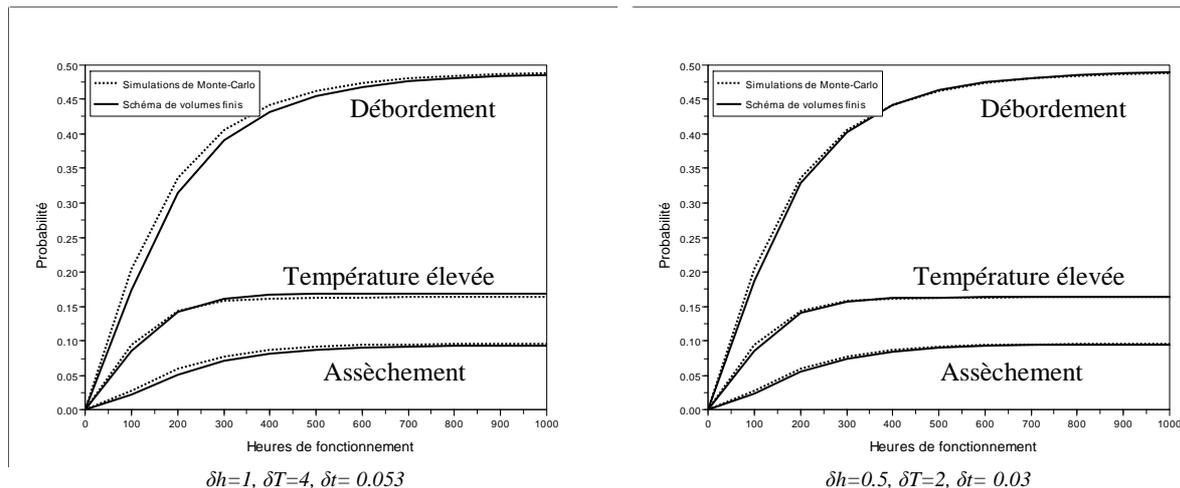


Figure 5 - Comparaisons des résultats trouvés avec l'algorithme de volumes finis en fonction de différents pas de discrétisation et ceux trouvés avec des simulations de Monte-Carlo dans (Zhang et al. 2008). Les pas de discrétisations sont précisés en dessous de chaque graphe.

Nombre d'histoires simulées	10^3	10^4	10^5	10^6
Temps de calcul	0.98s	10.03s	1m37s	16m37s
Erreur relative	1.75%	1.5%	0.9%	0.13%

Tableau 1 - Temps de calcul et erreur relative d'estimation de $p_I(1000)$ associés à différents nombres d'histoires simulées pour Monte Carlo. Ces résultats sont issus de l'article (Zhang et al. 2008).

De la même façon, nous calculons l'erreur relative engendrée par le schéma de volumes finis. Ces résultats sont visibles dans le tableau 2.

Pas de discrétisation	δh	δT	δt	δh	δT	δt	δh	δT	δt	δh	δT	δt	δh	δT	δt
	1	10	0.111	1	4	0.53	0.5	2	0.03	0.25	2	0.31	0.25	1	0.16
Temps de calcul	1m			2m48s			9m12s			13m14s			49m		
Erreur relative	4.23%			2.87%			1.21%			0.71%			0.56%		

Tableau 2 - Temps de calcul et erreur relative d'estimation de $p_I(1000)$ associés à différents pas de discrétisation pour le schéma de volumes finis.

A précision égale, les temps de calcul sont plus longs avec le schéma de volumes finis. Cependant, contrairement aux méthodes de Monte-Carlo, les courbes trouvées avec le schéma de volumes finis sont lisses quels que soient les pas de discrétisation utilisés. En effet, avec la méthode de Monte-Carlo, la diminution du nombre d'histoires simulées, entraîne des irrégularités visibles sur les courbes (Zhang et al. 2008). Cela devient une contrainte lorsque l'on recherche un optimum avec cette méthode de calcul. Les applications industrielles testées à la SNCF ont consisté à optimiser des stratégies de maintenance, voir (Lair et al. 2009) et (Lair et al. 2010) à l'aide d'un algorithme de recuit simulé. Il a été constaté qu'avec des simulations de Monte-Carlo, l'algorithme de recuit simulé utilisé a posé des difficultés de convergence. Pour palier à ces difficultés de convergence, un nombre plus important d'histoires peut être simulé, ce qui augmente les temps de calcul et peut rendre l'optimisation de la stratégie de maintenance difficile.

Conclusion

Les PDMP permettent de modéliser des systèmes complexes dont l'évolution dans le temps dépend de l'environnement comme c'est le cas pour le réservoir. L'apport de cet article n'est pas dans la manière de modéliser le système car cela a déjà été effectuée dans (Zhang et al. 2008) mais se situe dans la manière de le quantifier. La quantification peut se faire principalement de deux manières différentes : la première consiste à utiliser des simulations de Monte-Carlo (Zhang et al. 2008) et (Castaneda 2009) et l'autre façon est d'utiliser un algorithme déterministe de type volumes finis, ce que nous avons fait ici. Les résultats trouvés avec cet algorithme sont précis. Ce cas d'application nous a donc permis de valider cette méthode.

Dans les cas d'étude que nous avons déjà eu à traiter, l'avantage des PDMP est qu'ils permettent de modéliser des systèmes dont les composants vieillissent soumis à des stratégies de maintenance correctives et préventives. Dans l'hypothèse où les composants sont stochastiquement indépendants, nous développons des méthodes permettant de simplifier l'algorithme de volumes finis et d'améliorer les temps de calculs afin de faciliter l'optimisation de la maintenance.

Remerciements

Nous remercions Zhang, H., Dufour, F., Dutuit, Y. et Gonzalez, K., pour nous avoir autorisés à nous inspirer de la modélisation du système et à comparer nos résultats avec ceux qu'ils ont trouvés dans (Zhang et al. 2008).

Références

- Zhang, H., Dufour, F., Dutuit, Y., Gonzalez, K., 2008, Piecewise Deterministic Markov Processes and dynamic reliability, *Journal of Risk and Reliability*, vol 222, pp 545-551.
- Castaneda, G.P., 2009, Evaluation par simulation de la Sûreté de Fonctionnement de systèmes en contexte dynamique hybride, Thèse, Centre de Recherche en Automatique de Nancy.
- Tombuyses, B. and Aldemir, T., 1996, Continuous cell-to-cell mapping and dynamic PSA. ICONE 4.
- Lair, W., Ziani, R., Mercier, S., Roussignol, M., 2009, Modélisation et quantification de systèmes vieillissants pour l'optimisation de la maintenance (application au circuit de voie), QUALITA, Besançon.
- Lair, W., Ziani, R., Mercier, S., Roussignol, M., 2010, Modeling and quantification of aging systems for maintenance optimization (under the air conditioning system), RAMS, San Jose.
- Davis, M.H.A., 1984, Piecewise Deterministic Markov Processes: a general class of non-diffusion stochastic models, *Journal Royal Statistical Soc. (B)*, vol 46, pp 353-388.
- Davis, M.H.A., 1993, *Markov models and optimization*, Chapman & Hall.
- Devooght, J., 1997, Dynamic Reliability, *Advances in Nuclear Science and Technology*, vol 25, pp215-178.
- Cocozza-Thivent, C., Eymard, R., Mercier, S., Roussignol, M., 2006, Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, vol 2006, pp 1-18.
- Eymard, R., Cocozza-Thivent, C., Mercier, S., 2006, A finite volume scheme of dynamic reliability models, *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol 26(3), pp 446-471.
- Eymard, R., Mercier, S., Prignet, A., 2008, An implicit volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data to Piecewise Deterministic Markov Processes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol 222, pp 293-232.